Data: 02/04/2018

(1) (30.0 pontos) Calcule os 3 primeiros coeficientes da série de Fourier-Legendre da função $f(x) = 2 + x$.

Solução da Questão 1:

A série de Fourier-Legendre é:

$$\mathrm{SFL} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

Os 3 primeiros polinômios de Legendre são obtidos da fórmula geral:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n\right]$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} \left[(x^2-1)^0\right] = \frac{1}{1}1 = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d}{dx} \left[(x^2-1)\right] = \frac{1}{2}2x = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} \left[(x^2-1)^2\right] = \frac{1}{4(2)} \frac{d^2}{dx^2} \left[x^4 - 2x^2 + 1\right] = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \left[4x^3 - 4x\right] = \frac{1}{8} \left[12x^2 - 4\right] = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Os coeficientes podem ser obtidos por:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx$$

Portanto, para $f(x) = 2 + x$, tem-se:

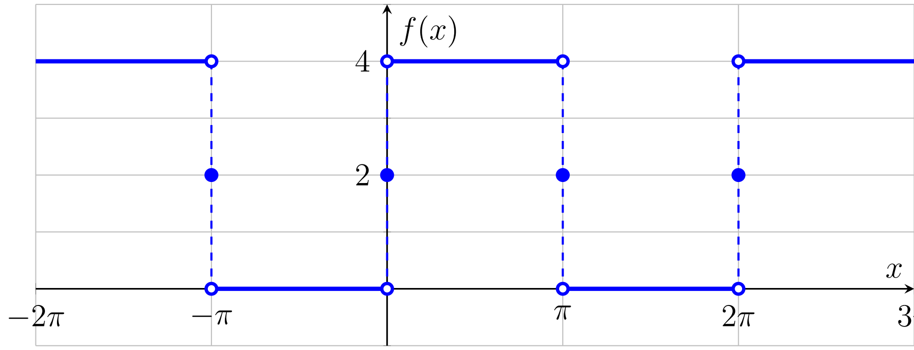
$$c_0 = \frac{2(0)+1}{2} \int_{-1}^{+1} (2+x) P_0(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (2+x)(1)\, dx = \frac{1}{2}(2x + \frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}(4) = 2 \quad \blacksquare$$

$$c_1 = \frac{2(1)+1}{2} \int_{-1}^{+1} (2+x) P_1(x)\, dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} (2+x)x\, dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} (2x + x^2)\, dx = \frac{3}{2}(x^2 + \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{+1} = \frac{3}{2}\frac{2}{3} = 1 \quad \blacksquare$$

$$c_2 = \frac{2(2)+1}{2} \int_{-1}^{+1} (2+x) P_2(x)\, dx = \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} (2+x) \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \left(3x^2 - 1 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right) dx = \frac{5}{2} \left(\frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{+1} = \frac{5}{2}[(1-1) - (-1-(-1)] = 0 \quad \blacksquare$$

(2) (40.0 pontos) Considere a onda "retangular" de período 2π ilustrada na figura abaixo. A função $f(x)$ é definida como 2 em $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ como estão indicados os círculos cheios. Calcule a série de Fourier trigonométrica para $f(x)$ usando $L = b - a = \pi - (-\pi) = 2\pi$.



Solução da Questão 2

A série de Fourier pode ser obtida por:

$$\text{SF}f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right]$$

Os coeficientes de Fourier são obtidos por:

$$A_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{2\pi}\right)\,dx$$

Sendo que o A_0 é:

$$A_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} 4\,dx\right] = \frac{1}{\pi}4x\bigg|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{\pi} = 4 \quad \square$$

E os A_n

$$A_n = \frac{2}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cos\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right)\,dx + \int_{0}^{\pi} 4\cos\left(\frac{\pi n x}{\pi}\right)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 4\cos(nx)\,dx$$

$$A_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n}\left[\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(n0)\right] = 0 \quad \square$$

Já os B_n podem ser calculados por:

$$B_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{2\pi}\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 4\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{4}{\pi n}\left[-\cos(nx)\right]\bigg|_0^{\pi}$$

$$B_n = \frac{-4}{\pi n}\left[\cos(n\pi) - \cos(n0)\right] = \frac{4}{\pi n}\left[1 - \cos(n\pi)\right] \quad \square$$

Portanto, a série de Fourier é:

$$\text{SF}f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\text{sen}\,(nx) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n}[1 - \cos{(n\pi)}]\,\text{sen}\,(nx) \quad \blacksquare$$

Os coeficientes B_n também podem ser escritos como:

$$B_n = \frac{4}{\pi n}[1 - \cos{(n\pi)}] = \frac{4}{\pi n}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{8}{nx}, & n = 1, 3, ... \\ 0, & n = 2, 4, ... \end{cases}$$

Portanto, outras formas de escrever a SF são:

$$\text{SF}f(x) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{1,3,...}^{\infty} \frac{1}{n}\,\text{sen}\,(nx) \quad \blacksquare$$

$$\text{SF}f(x) = 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{1,2,3,...}^{\infty} \frac{\text{sen}\,(2n-1)\,x}{2n-1} \quad \blacksquare$$

(3) (30.0 pontos) Considere o seguinte conjunto de vetores em $\mathbf{R}^2$ com o produto interno convencional, ou seja, produto escalar.

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Se $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um vetor da base, obtenha um segundo vetor ortonormal da base geradora de S.

Solução da Questão 3:

Então, a fim de obter um conjunto ortogonal de vetores:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\tfrac{8}{\sqrt{10}}\right) \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - (4/5) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$$

Verifica-se que os vetores u1 e u2 são de fato ortogonais:

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0,$$

notando que, se o produto escalar de dois vetores for 0 , então eles serão ortogonais.

Para vetores diferentes de zero, pode-se normalizar os vetores dividindo seu tamanho:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{40}{25}}} \begin{pmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{25}{40}} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{10}} 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Outra opção é:

$$-\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Relações Matemáticas

$$\text{SF}f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right]$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \, dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \, dx$$

$$\text{SFL}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right].$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) \, dx$$