(1) (40.0 pontos) Resolva a equação diferencial e condição inicial usando Transformada de Fourier:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u = 0, \qquad u(x,0) = f(x) = x$$

Solução da Questão 1:

Aplica-se a transformada de Fourier nas duas equações: EDP e condição inicial.
A transformada da EDP é:

$$ik\hat{u}(k,t) + \frac{\partial \hat{u}(k,t)}{\partial t} + \hat{u}(k,t) = 0$$

Obtem-se uma EDO em t, que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \hat{u}(k,t)}{\partial t} = (-ik-1)\hat{u}(k,t)$$

cuja solução é:

$$\hat{u}(k,t) = A(k)e^{(-ik-1)t}$$

A transformada da condição inicial é:

$$\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$$

a condição inicial implica em $A(k) = \hat{f}(k)$.

$$\hat{u}(x,t) = e^{-t}\hat{f}(k)e^{-ikt}$$

Aplicando a transformada inversa:

$$\mathscr{F}^{-1}[\hat{u}(x,t)] = \mathscr{F}^{-1}\left[e^{-t}\hat{f}(k)e^{-ikt}\right] = e^{-t}\mathscr{F}^{-1}\left[\hat{f}(k)e^{-ikt}\right]$$

$$u(x,t) = e^{-t}\mathscr{F}^{-1}\left[\hat{f}(k)e^{-ikt}\right]$$

Calculando a transformada inversa, usando $\mathscr{F}^{-1}[e^{-ika}\hat{f}(k)] = f(x-a)$ (consequência do teorema da convolução) e fazendo $a = t$, obtém-se:

$$u(x,t) = e^{-t}f(x-t) = e^{-t}(x-t) \quad \blacksquare$$

Observação: para calcular a transformada da condição inicial, pode-se cair na tentação de calcular:

$$\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-ikx}\,dx \quad \rightarrow \quad \text{não converge para valor finito} \tag{1}$$

A integral da equação 1 é não convergente!

(2) (40.0 pontos) Encontre a Função de Green do problema:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = f(t), \qquad y(0) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t} = 0,$$

Solução da Questão 2

Utilizando o Método das Funções de Green, trocando a variável $t \to \tau$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} = f(\tau)$$

$$\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Realizando uma integral por partes do lado esquerdo:

$$Gy'\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} G'y'\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Fazendo $G(t,\infty) = 0$

$$-G(t,0)y'(0) - \int_{\tau=0}^{\infty} G'y'\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Fazendo uma segunda integral por partes do lado esquerdo:

$$-G(t,0)y'(0) - \left[G'y\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} G''y\,\mathrm{d}\tau \right] = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Fazendo $G'(t,\infty) = 0$

$$-G(t,0)y'(0) + G'(t,0)y(0) + \int_{\tau=0}^{\infty} G''y\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Mas, como a função é a solução fundamental para o forçante impulso: $L^{\#}G = G'' = \delta(\tau - t)$:

$$y(t) = G(t,0)y'(0) - G'(t,0)y(0) + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Usando as condições iniciais:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Para calcular a função de Green, resolve-se:

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\tau^2} = \delta(\tau - t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e usando $\mathcal{L}\left[\delta(\tau - t)\right] = e^{-st}$:

$$s^2\bar{G}(t,s) - sG(t,0) - G'(t,0) = e^{-st}$$

Isolando $\bar{G}$

$$\bar{G} = \frac{e^{-st}}{s^2} + \frac{G(t,0)}{s} + \frac{G'(t,0)}{s^2}$$

Aplicando a transformada inversa:

$$G(t,\tau) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{G}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(t,0)}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G'(t,0)}{s^2}\right]$$

$$G(t,\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right] + G(t,0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + G'(t,0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

Usando as transformadas inversas do formulário:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-st}\right] = \delta(\tau - t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = t^n \quad (s > 0,\ n \text{ inteiro positivo})$$

Para $n = 1$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$$

Obtém-se:

$$G(t,\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right] + G(t,0) + G'(t,0)\,t$$

A convolução de Laplace é $[f * g](t) = \int\limits_0^\tau f(u)g(\tau - u)\,\mathrm{d}u$. Do Teorema de Convolução :

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \bar{f}(s)\bar{g}(s)$$
$$f * g = \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{f}(s)\bar{g}(s)\right]$$

$\bar{f}(s) = e^{-st} \quad \rightarrow \quad f(u) = \delta(u - t)$

$\bar{g}(s) = \dfrac{1}{s^2} \quad \rightarrow \quad g(u) = u \quad \rightarrow \quad g(\tau - u) = \tau - u$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{f}(s)\bar{g}(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-st}\frac{1}{s^2}\right] = f * g = \int\limits_0^\tau f(u)g(\tau - u)\,\mathrm{d}u = \int\limits_0^\tau \delta(u - t)(\tau - u)\,\mathrm{d}u = (\tau - t)H(\tau - t)$$

Voltando na Função de Green:

$$G(t,\tau) = (\tau - t)H(\tau - t) + G(t,0) + G'(t,0)\,t$$

A função de Green também deve obedecer as condições iniciais do problema, $G(t,0) = G'(t,0) = 0$. Portanto:

$$G(t,\tau) = (\tau - t)H(\tau - t) \quad \blacksquare$$

(3) (20.0 pontos) A equação diferencial e as condicões de contorno abaixo são um Problema de Sturm-Liouville? Sim ou não? Se não forem, como podemos transformar em um problema de Sturm-Liouville?

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \lambda y = 0, \qquad (0 < x < \pi) \qquad y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

Solução da Questão 3:

A EDO de Sturm-Liouville é:

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0$$
$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0$$

O coeficiente de y' deve ser igual à derivada do coeficiente de y''. No problema acima isso não é verdade.

Portanto, **não é um problema de Sturm-Liouville**. ■

Para transformá-lo em um problema de Sturm-Liouville vamos multiplicar por uma função $\sigma(x)$:

$$\sigma\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \sigma 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sigma\lambda y = 0$$

Agora vamos resolver para encontrar $\sigma(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = -\sigma 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} = -2x\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} = -\int 2x\mathrm{d}x$$

$$\ln\sigma = -x^2$$

$$\sigma(x) = e^{-x^2} \quad ■$$

Agora, tem-se um problema de Sturm-Liouville.

Relações Matemáticas

$$\mathscr{F}\left\{f(x)\right\} = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \qquad f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} = ik\hat{f}(k) \quad \mathscr{F}\left\{f(x-a)\right\} = e^{ika}\mathscr{F}\left\{f(x)\right\} \quad \text{Convolução de Fourier: } [f*g](t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\, d\xi$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \quad (s>0) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \mathrm{sen}(at) \quad (s>0) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at} \quad (s>a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at) \quad (s>0) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = t^n \quad (s>0,\ n \text{ inteiro positivo})$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(\tau-t)\right] = e^{-st} \quad (s>0) \qquad \text{Convolução de Laplace:} \qquad [f*g](t) = \int\limits_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\bar{f}(s) - f(0) \qquad \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\text{EDO de Sturm-Liouville:} \quad [p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0$$