Data: 23/05/2018
Professor: Emílio G. F. Mercuri

(1) (50.0 pontos) Resolva a equação diferencial parcial com condição inicial utilizando o Método das Características. Verifique se a solução satisfaz a EDP.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = yu, \qquad u(0,y) = y$$

Solução da Questão 1:

Usando o método das características, vamos parametrizar as variáveis:

$$u = U(s) \qquad y = Y(s) \qquad x = X(s)$$

Derivada total:

$$\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{ds}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{ds}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{ds}}$$

Comparando com a EDP:

$$\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{ds}} = 1 \qquad \rightarrow \qquad X - X(0) = s, \qquad \text{fazendo} \quad X(0) = 0$$

$$\therefore \quad X = x = s \quad \square$$

$$\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{ds}} = x \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{d}Y = s\,\mathrm{d}s \qquad \rightarrow \qquad Y - Y(0) = \frac{s^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad Y = \frac{s^2}{2} + Y(0)$$

$$\therefore \quad Y(0) = Y - \frac{X^2}{2} \quad \square$$

$$\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{ds}} = YU \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{ds}} = \left[\frac{s^2}{2} + Y(0)\right]U \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}U}{U} = \left[\frac{s^2}{2} + Y(0)\right]\mathrm{d}s$$

$$\int_{U(0)}^{U(s)} \frac{\mathrm{d}U}{U} = \int_0^s \left[\frac{v^2}{2} + Y(0)\right]\mathrm{d}v \qquad \rightarrow \qquad \ln\left[\frac{U(s)}{U(0)}\right] = \frac{s^3}{6} + Y(0)s \qquad \rightarrow \qquad U(s) = U(0)e^{\frac{s^3}{6} + Y(0)s} \quad \square$$

Da condição inicial: $\quad u(0,y) = y \quad \rightarrow \quad U(0,Y) = Y$
Mas em $\quad x = X = s = 0 \quad \rightarrow \quad U(0,Y(0)) = Y(0) = Y - \frac{X^2}{2}$

$$\therefore \quad U(0) = Y - \frac{X^2}{2}$$

Voltando para as variáveis iniciais:

$$u(x,y) = \left(y - \frac{x^2}{2}\right)e^{\frac{x^3}{6} + \left(y - \frac{x^2}{2}\right)x}$$

Simplificando:

$$u(x,y) = \left(y - \frac{x^2}{2}\right)e^{\left(-\frac{x^3}{3} + xy\right)} \quad \blacksquare$$

Essa solução satisfaz tanto a EDP quanto as condições iniciais. $\blacksquare$ (prova realizada em sala de aula).

(2) (50.0 pontos) Resolva a equação da difusão com o método da separação de variáveis

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad \phi(x,0) = f(x), \qquad \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0,$$

Solução da Questão 2:

O método da separação das variáveis sugere:

$$\phi(x,t) = X(x)T(t)$$

Substituindo:

$$X\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = \alpha^2\, T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}$$
$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{T}\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = c_1$$

Chega-se em um sistema de duas EDOs:

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - c_1X = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} - \alpha^2Tc_1 = 0 \tag{2}$$

Fazendo $c_1 = -\lambda$ na Equação 1, sendo λ um valor positivo, tem-se um problema de Sturm Liouville:

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \lambda X = 0$$

cujas autofunções são:

$$\phi_n = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

e os autovalores são:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad \rightarrow \qquad c_1 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \square$$

Portanto, a solução da Eq. (1) pode ser escrita como uma série de Fourier:

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\phi_n$$

Agora iremos resolver a segunda EDO, Eq. (2):

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} - \alpha^2Tc_1 = 0$$

Substituindo $c_1 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$:

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} + \alpha^2T\frac{n^2\pi^2}{L^2} = 0$$

Cuja solução é:

$$T = c_2\, e^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t} \quad \square$$

Incorporando a constante de integração c_2 nos $A_n'^s$ da série de Fourier, tem-se a solução geral:

$$\phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \blacksquare$$

E os A_n são obtidos por:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x \quad \blacksquare$$