Data: 18/06/2018
Professor: Emílio G. F. Mercuri

(1) (50.0 pontos) Considere o sistema de equações diferenciais parciais acoplado:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - 5\frac{\partial v}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

É possível desacoplar o sistema. **Mostre o sistema desacoplado.** Não precisa resolver o sistema!

Solução da Questão 1:

Escrevendo o sistema de equações diferenciais no formato matricial, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -5\\2 & 0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Fazendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & -5\\2 & 0\end{bmatrix}$$

Considerando o problema de autovalor-autovetor: $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$

Esse problema tem solução não trivial se: $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) = 0$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -5\\2 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + 10 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-10} = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{10} \quad \square$$

Portanto, na base dos autovetores $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathrm{i}\sqrt{10} & 0\\0 & -\mathrm{i}\sqrt{10}\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

O sistema foi desacoplado:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + \mathrm{i}\sqrt{10}\,\frac{\partial U}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial V}{\partial t} - \mathrm{i}\sqrt{10}\,\frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

(2) (50.0 pontos) A análise de estabilidade de von Neumann é baseada na decomposição dos erros em *série de Fourier*. Considere a equação do calor unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

definida no intervalo espacial L. Ela pode ser discretizada usando o esquema de diferenças finitas, sendo $\mathrm{Fo} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \mathrm{Fo}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

Define-se o erro de truncamento como ϵ_j^n, entre a solução truncada $\tilde{u}_j^n$ e a solução analítica u_j^n como $\epsilon_j^n = \tilde{u}_j^n - u_j^n$. Devido à linearidade da equação, tem-se que:

$$\epsilon_j^{n+1} = \epsilon_j^n + \mathrm{Fo}\left(\epsilon_{j+1}^n - 2\epsilon_j^n + \epsilon_{j-1}^n\right)$$

Escrevendo a série de Fourier para ϵ_j^n:

$$\epsilon_j^n = \sum_{l=1}^{L/\Delta x} \xi_l e^{a t_n} e^{\mathrm{i} k_l x_j}$$

sendo $t_n = n\Delta t$ e $x_j = j\Delta x$. A condição necessária e suficiente para o erro permanecer limitado é $|e^{a\Delta t}| \leq 1$

Desenvolva a análise de estabilidade de von Neumann e **mostre a condição de estabilidade do esquema**.

Solução da Questão 2:

Dando continuidade à análise de estabilidade, temos que $t_{n+1} = (n+1)\Delta t = n\Delta t + \Delta t = t_n + \Delta t$, portanto:

$$\sum_{l=1}^{L/\Delta x} \xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{\mathrm{i} k_l j\Delta x} = \sum_{l=1}^{L/\Delta x} \xi_l e^{a t_n} e^{\mathrm{i} k_l j\Delta x} + \mathrm{Fo}\left(\sum_{l=1}^{L/\Delta x} \xi_l e^{a t_n} e^{\mathrm{i} k_l (x_j+\Delta x)} - 2\sum_{l=1}^{L/\Delta x} \xi_l e^{a t_n} e^{\mathrm{i} k_l j\Delta x} + \sum_{l=1}^{L/\Delta x} \xi_l e^{a t_n} e^{\mathrm{i} k_l (x_j-\Delta x)}\right)$$

Simplificando

$$e^{a\Delta t} = 1 + \mathrm{Fo}\left(e^{\mathrm{i} k_l \Delta x} - 2 + e^{-\mathrm{i} k_l \Delta x}\right)$$

Foi fornecida a identidade:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right) = -\frac{e^{ik_l\Delta x} + e^{-ik_l\Delta x} - 2}{4}$$

Usando a identidade, obtem-se:

$$e^{a\Delta t} = 1 - 4\mathrm{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right)$$

A condição necessária e suficiente para o erro permanecer limitado é $|e^{a\Delta t}| \leq 1$

$$\left|1 - 4\mathrm{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right)\right| \leq 1$$

retirando o módulo:

$$-1 \leq 1 - 4\mathrm{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right) \leq 1$$

analisando a desigualdade da esquerda:

$$-1 \leq 1 - 4\mathrm{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right) \qquad \rightarrow \qquad -2 \leq -4\mathrm{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right)$$

Multiplicando por -1:

$$2 \geq 4\mathrm{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right)$$

Isolando o Fo:

$$\mathrm{Fo} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right)}$$

Como $\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right)$ varia entre zero e um. O caso mais restritivo é quando o quadrado do seno é máximo, portanto:

$$\mathrm{Fo} \leq \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right) = \frac{e^{ik_m\Delta x/2} - e^{-ik_m\Delta x/2}}{2i} \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{sen}^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right) = -\frac{e^{ik_m\Delta x} + e^{-ik_m\Delta x} - 2}{4}$$