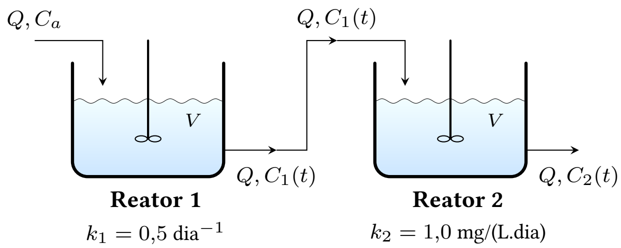
Data: 22/04/2019
Professor: Emílio G. F. Mercuri — Aluno(a): ______________________

Antes de iniciar a resolução leia atentamente a prova e verifique se a mesma está completa.
A avaliação é individual. Marque a resposta final a caneta. Boa sorte!

(1) Um processo de tratamento de efluentes é composto de dois reatores completamente misturados em série para reduzir a concentração do poluente C. O primeiro reator opera com uma reação de 1ª ordem para destruição do poluente com a taxa $k_1 = 0{,}5$ dia^{-1}. O segundo reator recebe o fluxo de saída do primeiro reator e consome o poluente através de uma reação de ordem zero com taxa $k_2 = 1{,}0$ mg/(L.dia).



O volume dos dois reatores é 200 L e a vazão é 100 L/dia. Considere que a concentração afluente ao primeiro reator é constante e igual a $C_a = 100$ mg/L. Além disso, a concentração inicial dos dois reatores é $C_0 = 100$ mg/L. Qual é a concentração de saída do Reator 2, C_2, após 300 dias?

Solução da Questão 1

Fazendo o balanço de massa para o poluente C no Reator 1, tem-se que:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_a - \dot{m}_e \pm \dot{m}_r$$

$$\frac{dC_1}{dt}V = QC_a - QC_1 - k_1C_1V$$

$$\frac{dC_1}{dt} + C_1\left(\frac{Q}{V} + k_1\right) = C_a\frac{Q}{V}$$

Fazendo $\beta = \dfrac{Q}{V} + k_1$

$$C_1' + \beta C_1 = C_a\frac{Q}{V}$$

Usando a técnica de fator integrante ($\times e^{\beta t}$):

$$e^{\beta t}\left(C_1' + \beta C_1\right) = C_a\frac{Q}{V}e^{\beta t}$$

$$\left(e^{\beta t}C_1\right)' = C_a\frac{Q}{V}e^{\beta t}$$

Integrando:

$$\int \left(e^{\beta t}C_1\right)' dt = \frac{Q}{V}C_a \int e^{\beta t}dt + A$$

$$e^{\beta t}C_1 = \frac{Q}{V}\frac{C_a}{\beta}e^{\beta t} + A$$

Dividindo por $e^{\beta t}$, tem-se:

$$C_1 = \frac{Q}{V}\frac{C_a}{\beta} + Ae^{-\beta t}$$

Mas, quando $t = 0$, $C_1 = C_0 = C_a$, e podemos encontrar $A = C_0 - \dfrac{Q}{V}\dfrac{C_0}{\beta}$. Substituindo A e simplificando, tem-se a seguinte expressão, que é a solução para regime transiente da concentração do primeiro reator:

$$C_1(t) = \frac{Q}{V}\frac{C_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + C_0e^{-\beta t}$$

Fazendo o balanço de massa para o poluente C no Reator 2, tem-se que:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_a - \dot{m}_e \pm \dot{m}_r$$

$$\frac{dC_2}{dt}V = QC_1 - QC_2 - k_2 V$$

$$\frac{dC_2}{dt} + \frac{Q}{V}C_2 = \frac{Q}{V}C_1 - k_2$$

Fazendo $\alpha = \dfrac{Q}{V}$ e substituindo C_1 do primeiro Reator, tem-se:

$$\frac{dC_2}{dt} + \alpha C_2 = \alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + C_0 e^{-\beta t} - k_2$$

Dada uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem linear na forma:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + p(t)y = q(t)$$

A solução geral é:

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + B\right]$$

Indentificando $y(t) = C_2(t)$, $p = \alpha$ e $q(t) = \alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + C_0 e^{-\beta t} - k_2$, a solução é:

$$C_2 = e^{-\int \alpha dt}\left\{\int e^{\int \alpha dt}\left[\alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + C_0 e^{-\beta t} - k_2\right] dt + B\right\}$$

$$C_2 = e^{-\alpha t}\left\{\int e^{\alpha t}\left[\alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + C_0 e^{-\beta t} - k_2\right] dt + B\right\}$$

$$C_2 = e^{-\alpha t}\left\{\int e^{\alpha t}\alpha^2 \frac{C_0}{\beta} dt - \int \alpha^2 \frac{C_0}{\beta} e^{(\alpha-\beta)t} dt + \int C_0 e^{(\alpha-\beta)t} dt - \int k_2 e^{\alpha t} dt + B\right\}$$

$$C_2 = e^{-\alpha t}\left\{\alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\int e^{\alpha t} dt - \alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\int e^{(\alpha-\beta)t} dt + C_0 \int e^{(\alpha-\beta)t} dt - k_2 \int e^{\alpha t} dt + B\right\}$$

$$C_2 = e^{-\alpha t}\left\{\alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} - \alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\frac{1}{(\alpha-\beta)} e^{(\alpha-\beta)t} + C_0 \frac{1}{(\alpha-\beta)} e^{(\alpha-\beta)t} - k_2 \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + B\right\}$$

$$C_2 = \alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\frac{1}{\alpha} - \alpha^2 \frac{C_0}{\beta}\frac{1}{(\alpha-\beta)} e^{-\beta t} + C_0 \frac{1}{(\alpha-\beta)} e^{-\beta t} - k_2 \frac{1}{\alpha} + B e^{-\alpha t}$$

$$C_2 = \alpha \frac{C_0}{\beta} - k_2 \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\frac{C_0}{(\alpha-\beta)} e^{-\beta t} + B e^{-\alpha t}$$

Quando $t = 0$, $C_2 = C_0$:

$$C_0 = \alpha \frac{C_0}{\beta} - k_2 \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\frac{C_0}{(\alpha-\beta)} + B$$

Substituindo $\alpha - \beta = -k_1$ e isolando B:

$$B = C_0 - \alpha \frac{C_0}{\beta} + k_2 \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\frac{C_0}{(k_1)}$$

$$B = C_0\left[1 - \frac{\alpha}{\beta} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\frac{1}{(k_1)}\right] + k_2 \frac{1}{\alpha}$$

Substituindo valores, $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}0$:

$$B = 100\left[1 - 0{,}5 + (1 - 0{,}25)\,2\right] + 2 = 100\left[0{,}5 + (0{,}75)\,2\right] + 2 = 202$$

Portanto:

$$C_2 = 50 - 2 - 200\,(0{,}75)\,e^{-t} + 202e^{-t/2}$$

$$C_2 = 48 - 150e^{-t} + 202e^{-t/2} \quad \blacksquare$$

Conferindo as condições iniciais: para $t = 0$:

$$C_2 = 48 - 150 + 202 = 100\,\text{mg/L}$$

Para $t = 2$ dias:

$$C_2 = 48 - 150(0{,}1353352832366127) + 202(0{,}3678794411714423) = 102.01\,\text{mg/L}$$

Para $t = 300$ dias:

$$C_2 = 48\,\text{mg/L} \quad \blacksquare$$

(2) Uma estação de tratamento descarrega efluentes tratados em um rio com as seguintes características, medidas imediatamente antes da confluência:

	Efluente	**Rio**
Vazão (m^3/s)	0,05	0,5
DBO (mg/L)	50	10
OD (mg/L)	1	6
Taxa de desoxigenação k_d (dia^{-1})	0,16	
Taxa de reaeração k_r (dia^{-1})		0,18
Velocidade média (m/s)		0,1
Temperatura (°C)	25	25

Considerando que a concentração de saturação de oxigênio dissolvido a 25°C é $S = 8{,}38$ mg/L, determine:

a) A concentração de oxigênio dissolvido no rio a 50 km do ponto de lançamento.
b) O déficit crítico de oxigênio dissolvido (maior déficit).

Solução da Questão 2

O tempo que demora para percorrer 50 km a partir do ponto de lançamento é:

$$t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{50.000{,}0}{0{,}1} = 500.000{,}0\,\text{s} = 5{,}78\,\text{dias}$$

A DBO imediatamente após a confluência é:

$$L_0 = \frac{0{,}05(50) + 0{,}5(10)}{0{,}05 + 0{,}5} = 13{,}64\,\text{mg/L}$$

O OD imediatamente após a confluência é:

$$\text{OD} = \frac{0{,}05(1) + 0{,}5(6)}{0{,}05 + 0{,}5} = 5{,}55\,\text{mg/L}$$

O déficit inicial é: $D_0 = S - \text{OD} = 8{,}38 - 5{,}55 = 2{,}83$ mg/L.

a) A concentração de oxigênio dissolvido no rio em $t = 5{,}78$ dias.

$$D = \frac{k_d L_0}{k_r - k_d}(e^{-k_d t} - e^{-k_r t}) + D_0 e^{-k_r t} = 5{,}725\,\text{mg/L}$$

Portanto, a concentração de OD a 50 km do ponto de lançamento é:

$$\text{OD} = S - D = 8{,}38 - 5{,}725 = 2{,}83\,\text{mg/L} \quad \blacksquare$$

b) O déficit crítico de oxigênio dissolvido (maior déficit).

O tempo crítico é:

$$t_c = \frac{1}{k_r - k_d} \ln\left\{\frac{k_r}{k_d}\left[1 - \frac{D_0(k_r - k_d)}{k_d L_0}\right]\right\} = 4{,}57\,\text{dias}$$

Da equação do balanço para o déficit:

$$\frac{dD}{dt} = k_d L_0 e^{-k_d t} - k_r D$$

Fazendo $\dfrac{dD}{dt} = 0$ pode-se encontrar o déficit crítico para o tempo crítico:

$$0 = k_d L_0 e^{-k_d t_c} - k_r D_c$$

$$D_c = \frac{k_d}{k_r} L_0 e^{-k_d t_c} = 5{,}83\,\text{mg/L} \quad \blacksquare$$

Relações Matemáticas

Equação diferencial ordinária:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + p(t)y = q(t)$$

Solução geral:

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + B\right]$$

Balanço do déficit de oxigênio dissolvido:

$$\frac{dD}{dt} = k_d L_0 e^{-k_d t} - k_r D$$

Equação de Streeter-Phelps:

$$D = \frac{k_d L_0}{k_r - k_d}(e^{-k_d t} - e^{-k_r t}) + D_0 e^{-k_r t}$$