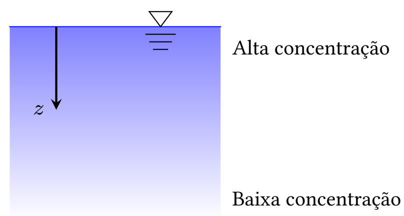
Data: 27/05/2019
Professor: Emílio G. F. Mercuri

**(1)** Considere o Fluxo Difusivo na interface ar-água em um lago.

O perfil de oxigênio na camada de água próximo à superfície do lago é:

$$C(z) = C_{\text{sat}} - (C_{\text{sat}} - C_l)\,\text{erf}\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right)$$

sendo que: $C_{\text{sat}} = 10$ mg/L é a concentração de saturação de oxigênio na água, $C_l = 8$ mg/L é a concentração de oxigênio numa profundidade média do lago e $\delta$ é a espessura da camada limite formada pelo escoamento do vento na superfície do lago. A variável $z$ é uma coordenada definida como positiva para baixo, sendo que na superfície do lago $z = 0$. A espessura $\delta = 2{,}5$ cm é mantida constante. Determine o fluxo de massa total de oxigênio para dentro do lago em gramas por dia. Considere que o lago tem uma área $A_l = 100$ m$^2$ e que o coeficiente de difusão do oxigênio molecular é $D_{O_2} = 0{,}2 \times 10^{-4}$ cm$^2$/s.




**Solução da Questão 1**

A lei de Fick afirma que o gradiente de concentração de oxigênio no lago gera um fluxo difusivo de massa para dentro do lago. Considerando que a concentração é uniforme nas direções $x$ e $y$, temos que:

$$q_z = -D\frac{dC}{dz}$$

A derivada da expressão da concentração é:

$$\frac{dC(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left[C_{\text{sat}} - (C_{\text{sat}} - C_l)\,\text{erf}\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\frac{dC}{dz} = -(C_{\text{sat}} - C_l)\frac{d}{dz}\left[\text{erf}\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\frac{dC}{dz} = -(C_{\text{sat}} - C_l)\frac{d}{dz}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z/\delta\sqrt{2}} e^{-\xi^2}d\xi\right]$$

$$\frac{dC}{dz} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}(C_{\text{sat}} - C_l)\frac{d}{dz}\left[\int_0^{z/\delta\sqrt{2}} e^{-\xi^2}d\xi\right]$$

Usando a Regra de Leibniz:

$$\frac{dC}{dz} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(C_{\text{sat}} - C_l)}{\delta\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right)^2}$$

Na superfície de lago, $z = 0$ e o fluxo difusivo se torna:

$$q_z = (C_{\text{sat}} - C_l)\frac{D\sqrt{2}}{\delta\sqrt{\pi}}$$

A unidade de $q_z$ é [M/(L$^2$·T)]. Para obter o fluxo de massa total, basta multiplicar pela área da superfície do lago $A_l$. Convertendo as unidades: $\delta = 0{,}025$ m, $D = 0{,}2 \times 10^{-8}$ m$^2$/s, $C_l = \frac{8\times10^{-3}\text{g}}{10^{-3}\text{m}^3}$ = 8 g/m$^3$

$$\dot{m} = A_l(C_{\text{sat}} - C_l)\frac{D\sqrt{2}}{\delta\sqrt{\pi}} = 100(10-8)\frac{0{,}2\times10^{-8}\sqrt{2}}{0{,}025\sqrt{\pi}} = 200\frac{0{,}2\times10^{-8}\sqrt{2}}{0{,}025\sqrt{\pi}} = 7{,}2\times10^{-6}\ \text{g/s} = 0{,}62\ \text{g/dia}$$

**(2)** Deseja-se estudar a dinâmica da biomassa de uma espécie de bactéria utilizando o modelo de crescimento logístico. A variação da concentração de bactéria $P$ pode ser representada pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = c\left(1 - \frac{P}{K}\right)P$$

sendo que $c$ é a taxa líquida de crescimento e $K$ representa a capacidade de suporte do meio.

Se a concentração inicial de bactérias é $P_0 = 2$ mg/$\ell$, $c = 1{,}2$ dia$^{-1}$ e $K = 5000$ mg/$\ell$. Determine a biomassa em 10 dias.

Dica: integrar a equação diferencial e usar a decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{P(1-\frac{P}{K})} = \frac{1}{P} + \frac{1}{(K-P)}$$

**Solução da Questão 2**:

Seguindo a sugestão, vamos integrar a equação diferencial

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \int c\,dt + C = c\,t + C$$

Agora, vamos usar a decomposição em frações parciais para resolver a integral do lado esquerdo:

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{K}\right)} = \int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{(K-P)} = \ln|P| - \ln|K-P|$$

Voltando para a equação:

$$\ln|P| - \ln|K-P| = c\,t + C$$

$$-\ln|P| + \ln|K-P| = -c\,t - C$$

$$\ln\left|\frac{K-P}{P}\right| = -c\,t - C$$

$$\left|\frac{K-P}{P}\right| = e^{-c\,t-C} = e^{-c\,t}e^{-C}$$

$$\frac{K-P}{P} = \pm e^{-c\,t}e^{-C}$$

Fazendo $A = \pm e^{-C}$

$$\frac{K-P}{P} = A\,e^{-c\,t}$$

$$\frac{K}{P} - 1 = A\,e^{-c\,t}$$

Isolando $P$:

$$P = \frac{K}{(1 + A\,e^{-c\,t})}$$

Encontrando $A$: se $t = 0 \quad \to \quad P(0) = P_0$

$$\frac{K-P_0}{P_0} = A\,e^{-c\,(0)} = A$$

Portanto:

$$P = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)\,e^{-c\,t}}$$

A biomassa em 10 dias é:

$$P(10) = \frac{5000}{1 + \left(\frac{5000-2}{2}\right)\,e^{-1{,}2\,(10)}} = 4924{,}39\,\text{mg}/\ell$$

## Relações Matemáticas

$$q_z = -D\frac{dC}{dz} \qquad \text{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

Regra de Leibniz: $$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + b'(t)\,f(b(t),t) - a'(t)\,f(a(t),t)$$

Equação diferencial ordinária e solução geral:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + p(t)y = q(t) \qquad y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + B\right]$$