Data: 24/10/2019
Professor: Emílio G. F. Mercuri

(1) Dada a equação diferencial da difusão unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad\qquad 0 \leq x \leq L$$

a) Analise a estabilidade do esquema *Leapfrog*:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

b) Além disso, compare a ordem de grandeza dos erros de truncamento nas aproximações de diferenças finitas para cada derivada.

Solução da Questão 1

a) Estabilidade de Von Neumann do Esquema *Leapfrog*:

$$\epsilon_i^{n+1} = \epsilon_i^{n-1} + 2\text{Fo}\left(\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n\right)$$

Expandindo em série de Fourier o erro ϵ_i^n, obtém-se:

$$\epsilon_i^n = \sum_l \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l x_i}$$

Para qualquer modo l da série de Fourier, ou seja, para qualquer número de onda, pode-se substituir no esquema de diferenças finitas e se analisar o fator de amplificação $e^{a\Delta t}$.

$$e^{a(t_n+\Delta t)}e^{\mathrm{i}k_l x_i} = e^{a(t_n-\Delta t)}e^{\mathrm{i}k_l x_i} + 2\text{Fo}\left(e^{at_n}e^{\mathrm{i}k_l x_{i+1}} - 2e^{at_n}e^{\mathrm{i}k_l x_i} + e^{at_n}e^{\mathrm{i}k_l x_{i-1}}\right)$$

Dividindo pelo fator comum: $e^{at_n}e^{\mathrm{i}k_l x_i}$:

$$e^{a\Delta t} = e^{-a\Delta t} + 2\text{Fo}\left(e^{\mathrm{i}k_l\Delta x} - 2 + e^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)$$

Fazendo uma troca de variáveis: $A = e^{a\Delta t}$ e usando a identidade trigonométrica $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$A = \frac{1}{A} + 4\text{Fo}\left(\cos(k_l\Delta x) - 1\right)$$

Agora usando $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ ou $-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) = (\cos(k_l\Delta x) - 1)$:

$$A = \frac{1}{A} + 4\text{Fo}\left[-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right]$$

Rearranjando:

$$A^2 + A\left[8\text{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right] - 1 = 0$$

Encontrando as raízes utilizando Báskara:

$$A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Nesse caso: $a = 1$, $b = \left[8\text{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right]$ e $c = -1$, portanto:

$$A = \frac{-\left[8\text{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right] \pm \sqrt{\left[8\text{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right]^2 + 4}}{2} = -\left[4\text{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right] \pm \frac{\sqrt{64\text{Fo}^2\operatorname{sen}^4\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) + 4}}{\sqrt{4}}$$

$$A = -4\text{Fo}\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) \pm \left\{16\text{Fo}^2\operatorname{sen}^4\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) + 1\right\}^{1/2}$$

A função seno tem valor máximo 1, portanto, adotando $\text{sen}^2\left(\frac{k_l \Delta x}{2}\right) = 1$ por simplicidade:

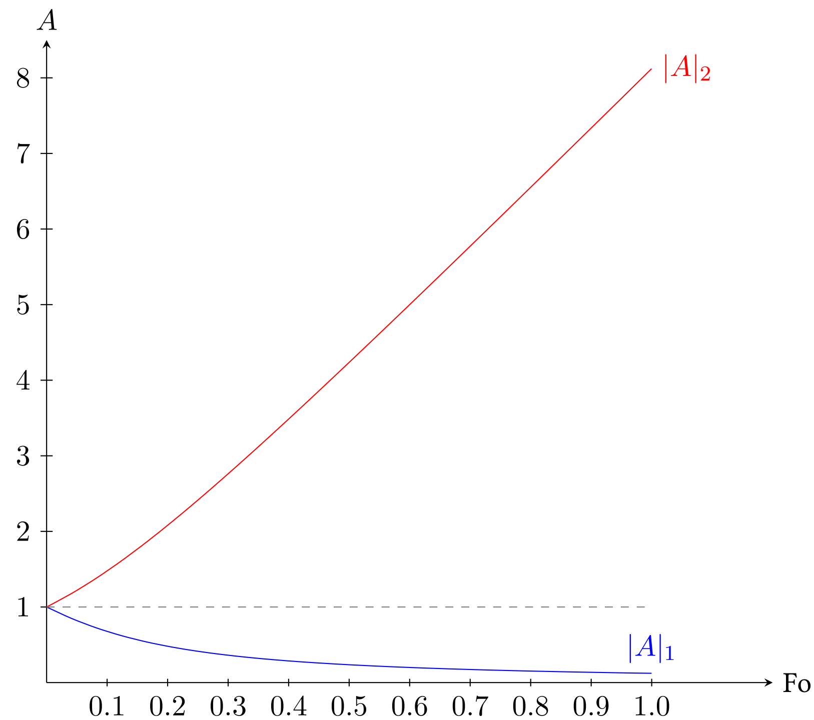
$$A = -4\text{Fo} \pm \left[16\text{Fo}^2 + 1\right]^{1/2}$$

A condição de estabilidade é $|A| \leq 1$. Portanto, tem-se duas opções:

$$|A|_1 = |-4\text{Fo} + \left[16\text{Fo}^2 + 1\right]^{1/2}|$$

$$|A|_2 = |-4\text{Fo} - \left[16\text{Fo}^2 + 1\right]^{1/2}|$$

As duas opções são ilustradas abaixo:



A expressão acima resulta em $|A|_1 < 1$ sempre e $|A|_2 > 1$ sempre, lembre-se que $\text{Fo} = D\Delta t/(\Delta x)^2 = 0$ não é possível. Como uma das raízes da equação quadrática é sempre > 1, pode-se afirmar que o esquema é **incondicionalmente instável**.

b) Ordens de grandeza dos erros de truncamento nas aproximações de diferenças finitas:
Das séries de Taylor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \mathrm{O}(\Delta t^2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \mathrm{O}(\Delta x^2)$$

(2) Considere agora o esquema de DuFort e Frankel para a mesma equação anterior. Nesse esquema o termo $2u_i^n$ é substituído por:

$$2u_i^n = u_i^{n+1} + u_i^{n-1}$$

Ou seja:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Analise a estabilidade do esquema de DuFort-Frankel.

Solução da Questão 2

Estabilidade de Von Neumann do Esquema *DuFort-Frankel*:

$$\epsilon_i^{n+1} = \epsilon_i^{n-1} + 2\text{Fo}\left(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^{n-1} + \epsilon_{i-1}^n\right)$$

Expandindo em série de Fourier o erro ϵ_i^n, obtém-se:

$$\epsilon_i^n = \sum_l \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l x_i}$$

Para qualquer modo l da série de Fourier, ou seja, para qualquer número de onda, pode-se substituir no esquema de diferenças finitas e se analisar o fator de amplificação $e^{a\Delta t}$.

$$e^{a(t_n+\Delta t)}e^{\mathrm{i}k_l x_i} = e^{a(t_n-\Delta t)}e^{\mathrm{i}k_l x_i} + 2\text{Fo}\left(e^{at_n}e^{\mathrm{i}k_l x_{i+1}} - e^{a(t_n+\Delta t)}e^{\mathrm{i}k_l x_i} - e^{a(t_n-\Delta t)}e^{\mathrm{i}k_l x_i} + e^{at_n}e^{\mathrm{i}k_l x_{i-1}}\right)$$

Dividindo pelo fator comum: $e^{at_n}e^{\mathrm{i}k_l x_i}$:

$$e^{a\Delta t} = e^{-a\Delta t} + 2\text{Fo}\left(e^{\mathrm{i}k_l\Delta x} - e^{a\Delta t} - e^{-a\Delta t} + e^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)$$

$$e^{a\Delta t} = e^{-a\Delta t} + 2\text{Fo}\left(e^{\mathrm{i}k_l\Delta x} + e^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right) - 2\text{Fo}\left(e^{a\Delta t} + e^{-a\Delta t}\right)$$

Rearranjando e usando a identidade trigonométrica $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$e^{a\Delta t}(1+2\text{Fo}) = e^{-a\Delta t}(1-2\text{Fo}) + 4\text{Fo}\cos(k_l\Delta x)$$

Fazendo uma simples troca de variáveis: $A = e^{a\Delta t}$ e multiplicando por A:

$$(1+2\text{Fo})A^2 - 4\text{Fo}\cos(k_l\Delta x)A - (1-2\text{Fo}) = 0$$

Encontrando as raízes utilizando Báskara:

$$A = \frac{4\text{Fo}\cos(k_l\Delta x) \pm \left\{[4\text{Fo}\cos(k_l\Delta x)]^2 + 4(1+2\text{Fo})(1-2\text{Fo})\right\}^{1/2}}{2(1+2\text{Fo})}$$

$$A = \frac{4\text{Fo}\cos(k_l\Delta x) \pm \left\{16\text{Fo}^2\cos^2(k_l\Delta x) + 4(1-4\text{Fo}^2)\right\}^{1/2}}{2(1+2\text{Fo})}$$

$$A = \frac{4\text{Fo}\cos(k_l\Delta x) \pm \left\{16\text{Fo}^2\cos^2(k_l\Delta x) + 4 - 16\text{Fo}^2\right\}^{1/2}}{2(1+2\text{Fo})}$$

$$A = \frac{4\text{Fo}\cos(k_l\Delta x) \pm \left\{16\text{Fo}^2[\cos^2(k_l\Delta x) - 1] + 4\right\}^{1/2}}{2(1+2\text{Fo})}$$

$$A = \frac{4\text{Fo}\cos(k_l\Delta x) \pm 2\left\{4\text{Fo}^2[\cos^2(k_l\Delta x) - 1] + 1\right\}^{1/2}}{2(1+2\text{Fo})}$$

Agora usando $-\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - 1$ e simplificando:

$$A = \frac{2\text{Fo}\cos(k_l\Delta x) \pm \left\{1 - 4\text{Fo}^2\operatorname{sen}^2(k_l\Delta x)\right\}^{1/2}}{(1+2\text{Fo})}$$

Fazendo $r = 4\text{Fo}^2\operatorname{sen}^2(k_l\Delta x)$

$$A = \frac{2\text{Fo}\cos(k_l\Delta x) \pm \{1-r\}^{1/2}}{(1+2\text{Fo})} = \frac{2\text{Fo}\cos(k_l\Delta x) \pm \sqrt{1-r}}{(1+2\text{Fo})}$$

Caso 1: $r \leq 1$

Como $r = 4\text{Fo}^2 \operatorname{sen}^2(k_l \Delta x)$ é sempre um valor positivo, $r \leq 1$ implica que $\sqrt{1-r} \leq 1$, portanto:

$$\sqrt{1-r} \leq 1$$
$$2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + \sqrt{1-r} \leq 2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + 1$$
$$\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + \sqrt{1-r}}{(1+2\text{Fo})} \leq \frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + 1}{(1+2\text{Fo})}$$
$$\left|\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + \sqrt{1-r}}{(1+2\text{Fo})}\right| \leq \left|\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + 1}{(1+2\text{Fo})}\right|$$

O cosseno varia entre $[-1{,}1]$, portanto no lado direito: como o numerador é sempre igual ou menor do que o denominador:

$$\left|\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + 1}{(1+2\text{Fo})}\right| \leq 1$$

Agora, observando o módulo do fator de amplificação (sinal positivo):

$$|A|_1 = \left|\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + \sqrt{1-r}}{(1+2\text{Fo})}\right| \leq \left|\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) + 1}{(1+2\text{Fo})}\right| \leq 1$$

Uma análise semelhante é válida para o sinal negativo:

$$|A|_2 = \left|\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) - \sqrt{1-r}}{(1+2\text{Fo})}\right|$$

Temos que o cosseno varia entre $[-1{,}1]$ e a raiz $\sqrt{1-r}$ varia entre $[0{,}1]$. Portanto, no caso em que $\cos(k_l \Delta x) = -1$ e $\sqrt{1-r} = 1$ ao aplicar o módulo, tem-se que o numerador é igual ao denominador. Em todos os outros casos o denominador é maior do que o numerador, portanto:

$$|A| = \left|\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x) \pm \sqrt{1-r}}{(1+2\text{Fo})}\right| \leq 1$$

O caso 1 é **estável**.

Caso 2: $r > 1$

Isso implica em A ser um número complexo. Portanto, $\sqrt{1-r} = \sqrt{(-1)(r-1)} = i\sqrt{r-1}$. Tem-se duas opções: A_1 e A_2:

$$A_1 = \frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x)}{(1+2\text{Fo})} + i\frac{\sqrt{r-1}}{(1+2\text{Fo})}$$
$$A_2 = \frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x)}{(1+2\text{Fo})} - i\frac{\sqrt{r-1}}{(1+2\text{Fo})}$$

Analisando o módulo de A_1:

$$|A_1| = \left\{\left[\frac{2\text{Fo}\cos(k_l \Delta x)}{(1+2\text{Fo})}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{r-1}}{(1+2\text{Fo})}\right]^2\right\}^{1/2}$$
$$|A_1| = \left\{\frac{4\text{Fo}^2\cos^2(k_l \Delta x) + (r-1)}{(1+2\text{Fo})^2}\right\}^{1/2}$$

Usando $r = 4\text{Fo}^2 \operatorname{sen}^2(k_l \Delta x)$:

$$|A_1| = \left\{\frac{4\text{Fo}^2\cos^2(k_l \Delta x) + 4\text{Fo}^2 \operatorname{sen}^2(k_l \Delta x) - 1}{(1+2\text{Fo})^2}\right\}^{1/2}$$
$$|A_1| = \left\{\frac{4\text{Fo}^2\left[\cos^2(k_l \Delta x) + \operatorname{sen}^2(k_l \Delta x)\right] - 1}{(1+2\text{Fo})^2}\right\}^{1/2} = \left\{\frac{4\text{Fo}^2 - 1}{(1+2\text{Fo})^2}\right\}^{1/2}$$

Escrevendo o binômio:

$$|A_1| = \left\{\frac{(2\text{Fo}-1)(2\text{Fo}+1)}{(1+2\text{Fo})^2}\right\}^{1/2}$$

Simplificando:

$$|A_1| = \left\{ \frac{(2\text{Fo} - 1)}{(1 + 2\text{Fo})} \right\}^{1/2}$$

Para qualquer Fo o numerador sempre será menor do que o denominador. Portanto $|A_1| < 1$.
A mesma análise é válida para A_2, pois $|A_1| = |A_2|$.
Portanto, o esquema DuFort-Frankel é **incondicionalmente estável** independentemente do valor de Fo.

Relações Matemáticas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$